

La respuesta es

$$\binom{m}{k} \cdot \sum_{i=0}^{m-k} (-1)^i \binom{m-k}{i} (n-k-i)!$$

**Explicación:** Lo primero que hacemos es escoger los  $k$  elementos que quedarán “clavados” en su sitio correcto. Esto se puede hacer de  $\binom{m}{k}$  maneras diferentes, pues cualquier subconjunto de  $k$  elementos entre los primeros  $m$  elementos sirve para este propósito.

Ahora bien, por cada una de estas clavadas nos quedan  $n-k$  elementos por ubicar. Hay que hacerlo de manera que en las primeras  $m-k$  posiciones ningún elemento quede en su sitio, porque si sucede lo contrario entonces habrá mas elementos clavados en su sitio de los  $k$  pedidos. Para contar cuántas permutaciones de  $n-k$  elementos cumplen esto, utilizamos el principio de inclusión-exclusión<sup>1</sup>. El resultado es la sumatoria que multiplica a  $\binom{m}{k}$ .

*Demostración.* Decimos que una permutación tiene la propiedad  $P_i$  si deja en su sitio el elemento  $i$ . El número que se busca es el número de permutaciones de  $n-k$  elementos que no tiene la propiedad  $P_i$  para  $i = 1, 2, \dots, m-k$  y lo denotamos  $D = N(\bar{P}_1 \bar{P}_2 \dots \bar{P}_{m-k})$ . Aplicando el principio de inclusión-exclusión tenemos que:

$$D = N - \sum_i N(P_i) + \sum_{i < j} N(P_i P_j) - \sum_{i < j < k} N(P_i P_j P_k) + \dots + (-1)^{m-k} N(P_1 P_2 \dots P_{m-k})$$

Vemos que

$$N = (n-k)!$$

pues  $N$  es la cantidad de permutaciones posibles.

Así mismo,

$$\sum_i N(P_i) = \binom{m-k}{1} (n-k-1)!$$

Esto es, clavamos un sólo elemento de los primeros  $m-k$  posibles, y el resto los permutamos de cualquier manera posible. Pero al restar estos elementos, restamos dos veces las permutaciones que tienen dos elementos fijos, así que las volvemos a sumar:

$$\sum_{i < j} N(P_i P_j) = \binom{m-k}{2} (n-k-2)!$$

Esto es, clavamos dos elementos y el resto los permutamos de cualquier manera posible.

Y en general,

$$\sum N(P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_r}) = \binom{m-k}{r} (n-k-r)!$$

Reemplazando estos términos en la ecuación original, obtenemos

$$\begin{aligned} D &= N - \sum_i N(P_i) + \sum_{i < j} N(P_i P_j) - \sum_{i < j < k} N(P_i P_j P_k) + \dots + (-1)^{m-k} N(P_1 P_2 \dots P_{m-k}) \\ &= (n-k)! - \binom{m-k}{1} (n-k-1)! + \binom{m-k}{2} (n-k-2)! - \dots + (-1)^{m-k} \binom{m-k}{m-k} (n-k-(m-k))! \\ &= \sum_{i=0}^{m-k} (-1)^i \binom{m-k}{i} (n-k-i)! \end{aligned}$$

□

<sup>1</sup>Bastante similar a la demostración del teorema 2, “Número de permutaciones completas”, Sección 6.6: *Aplicaciones del principio de inclusión-exclusión*, Capítulo 6: *Técnicas avanzadas de recuento*, página 430, del libro **Matemáticas discretas y sus aplicaciones**, Kenneth Rosen, quinta edición, McGraw-Hill.